

ANALIZA FUNKCJONALNA

WPPT
LISTA 16

Galowice, 24 marca 2013

ZADANIE 1.

Dla funkcji ciągłej f na $[0, 1]$ jej wielomian Bernsteina stopnia n jest zadany na $[0, 1]$ wzorem

$$B_{n,f}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) (1-x)^{n-i} x^i$$

Udowodnij, że wielomiany Bernsteina zbiegają jednostajnie do f , gdy n dąży do nieskończoności.

Wsk. Bardzo fajny dowód probabilistyczny jest w Wikipedii:

http://en.wikipedia.org/wiki/Bernstein_polynomial

Zauważ, że to zadanie dostarcza dowodu klasycznego Twierdzenia Weierstrassa.

ZADANIE 2. Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C^1([0, 1])$ (posiadającej ciągłą pochodną) istnieje ciąg wielomianów $p_n(x)$ taki, że

$$\max_{x \in [0,1]} |p_n(x) - f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |p'_n(x) - f'(x)| \xrightarrow{n} 0.$$

ZADANIE 3. Czy każda funkcja ciągła na $[0, 1]$ jest jednostajną granicą wielomianów o pochodnej w zerze równej zero (czyli bez wyrazu stopnia 1)?

ZADANIE 4. Czy każda funkcja ciągła na $[0, 1]$ jest jednostajną granicą wielomianów p_n spełniających $p_n(2) = a$ oraz $p'_n(2) = b$? (a i b dowolne stałe).

Wsk. Skorzystać z zadania 2.

ZADANIE 5. Wykaż, że każdą funkcję ciągłą rzeczywistą na \mathbb{R} można jednostajnie przybliżać funkcjami klasy C^∞ .

Uwaga. Niemal jednostajnie przybliżać jest łatwo. Problem jak to zrobić jednostajnie!

Tomasz Downarowicz